Míry křivosti a integrálně-geometrické vzorce

Jan Rataj

Charles University, Prague

30. ledna 2018

Obsah

Míry křivosti hladkých oblastí

$X \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní C^2-oblast

Míry křivosti hladkých oblastí

$X \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní C^2-oblast

- $\nu_X : \partial X \to S^{d-1}$ - Gaussovo zobrazení

Míry křivosti hladkých oblastí

$X \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní C^2-oblast

- $\nu_X : \partial X \to S^{d-1}$ - Gaussovo zobrazení
- $\kappa_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, d-1$ - hlavní křivosti X v x - vlastní čísla Weingartenova zobrazení:

$$-D\nu_X(b_i) = \kappa_i b_i, \quad i = 1, \dots, d-1$$

Míry křivosti hladkých oblastí

$X \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní C^2-oblast

- $\nu_X : \partial X \to S^{d-1}$ - Gaussovo zobrazení
- $\kappa_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, d-1$ - hlavní křivosti X v x - vlastní čísla Weingartenova zobrazení:

$$-D\nu_X(b_i) = \kappa_i b_i, \quad i = 1, \dots, d-1$$

- Totální míry křivosti:

$$C_k(X) := \text{const} \int_{\partial X} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_{d-1-k}} \underbrace{\kappa_{i_1}(x) \dots \kappa_{i_{d-1-k}}(x)}_{s_{d-1-k}(x)} \mathcal{H}^{d-1}(dx)$$

Míry křivosti hladkých oblastí

$X \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní C^2-oblast

- $\nu_X : \partial X \to S^{d-1}$ - Gaussovo zobrazení
- $\kappa_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, d-1$ - hlavní křivosti X v x - vlastní čísla Weingartenova zobrazení:

$$-D\nu_X(b_i) = \kappa_i b_i, \quad i = 1, \dots, d-1$$

- Totální míry křivosti:

$$C_k(X) := \text{const} \int_{\partial X} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_{d-1-k}} \underbrace{\kappa_{i_1}(x) \dots \kappa_{i_{d-1-k}}(x)}_{s_{d-1-k}(x)} \mathcal{H}^{d-1}(dx)$$

- Lokální verze - míry křivosti:

$$C_k(X, \cdot) := \int_{\partial X \cap \cdot} \dots$$

Konvexní tělesa

$K \subset \mathbb{R}^d$ konvexní, neprázdná, kompaktní

Konvexní tělesa

$K \subset \mathbb{R}^d$ konvexní, neprázdná, kompaktní

1. *Steinerův vzorec*:

$$\mathrm{vol}(K \oplus rB) = \sum_{k=0}^{d} \omega_k r^k C_{d-k}(K)$$

Konvexní tělesa

$K \subset \mathbb{R}^d$ konvexní, neprázdná, kompaktní

1. *Steinerův vzorec*:

$$\mathrm{vol}(K \oplus rB) = \sum_{k=0}^{d} \omega_k r^k C_{d-k}(K)$$

2. "Quermassintegrals":

$$C_k(K) = \mathsf{const} \int_{G(d,k)} \mathrm{vol}_k(p_L K)\, dL$$

Množiny kladného dosahu (Federer, 1959)

reach $X \geq r > 0 \overset{def}{\iff} \forall z,\ \mathrm{dist}(z, X) \leq r \implies \exists! x \in X :$
$\|x - z\| = \mathrm{dist}(z, X)$.

Množiny kladného dosahu (Federer, 1959)

$\operatorname{reach} X \geq r > 0 \overset{def}{\iff} \forall z, \operatorname{dist}(z, X) \leq r \implies \exists! x \in X : \|x - z\| = \operatorname{dist}(z, X).$

- $\operatorname{reach} X > 0 \implies$ míry křivosti $C_k(X, \cdot)$ mohou být zavedeny pomocí *lokálního* Steinerova vzorce $(0 < r < \operatorname{reach} X)$

Množiny kladného dosahu (Federer, 1959)

$\operatorname{reach} X \geq r > 0 \overset{def}{\iff} \forall z, \operatorname{dist}(z, X) \leq r \implies \exists! x \in X :$
$\|x - z\| = \operatorname{dist}(z, X)$.

- $\operatorname{reach} X > 0 \implies$ míry křivosti $C_k(X, \cdot)$ mohou být zavedeny pomocí *lokálního* Steinerova vzorce ($0 < r < \operatorname{reach} X$)
- nebo jako integrály lokálních křivostí (Zähle, 1986):
- $\operatorname{nor} X := \{(x, u) : x \in \partial X, u \in \operatorname{Nor}(X, x) = \operatorname{Tan}(X, x)^o\}$ - normálový svazek

Množiny kladného dosahu (Federer, 1959)

$\operatorname{reach} X \geq r > 0 \overset{def}{\iff} \forall z, \operatorname{dist}(z, X) \leq r \implies \exists! x \in X :$
$\|x - z\| = \operatorname{dist}(z, X)$.

- $\operatorname{reach} X > 0 \implies$ míry křivosti $C_k(X, \cdot)$ mohou být zavedeny pomocí *lokálního* Steinerova vzorce ($0 < r < \operatorname{reach} X$)
- nebo jako integrály lokálních křivostí (Zähle, 1986):
- $\mathrm{nor}\, X := \{(x, u) : x \in \partial X, u \in \mathrm{Nor}\,(X, x) = \mathrm{Tan}\,(X, x)^o\}$ - normálový svazek
- $\kappa_1(x, u), \kappa_{d-1}(x, u) \in [-\operatorname{reach} X, \infty]$ - (zobecněné) hlavní křivosti v $(x, u) \in \mathrm{nor}\, X$

Množiny kladného dosahu (Federer, 1959)

$\operatorname{reach} X \geq r > 0 \overset{def}{\iff} \forall z, \operatorname{dist}(z, X) \leq r \implies \exists! x \in X:$
$\|x - z\| = \operatorname{dist}(z, X)$.

- $\operatorname{reach} X > 0 \implies$ míry křivosti $C_k(X, \cdot)$ mohou být zavedeny pomocí *lokálního* Steinerova vzorce $(0 < r < \operatorname{reach} X)$
- nebo jako integrály lokálních křivostí (Zähle, 1986):
- $\mathrm{nor}\, X := \{(x, u) :\ x \in \partial X, u \in \mathrm{Nor}\,(X, x) = \mathrm{Tan}\,(X, x)^o\}$ - normálový svazek
- $\kappa_1(x, u), \kappa_{d-1}(x, u) \in [-\operatorname{reach} X, \infty]$ - (zobecněné) hlavní křivosti v $(x, u) \in \mathrm{nor}\, X$

$$C_k(X) := \mathrm{const} \int_{\mathrm{nor}\, X} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{d-1-k}} \frac{\kappa_{i_1}(x, u) \ldots \kappa_{i_{d-1-k}}(x, u)}{\sqrt{1 + \kappa_1(x, u)^2} \ldots \sqrt{1 + \kappa_{d-1}}}$$
$$\mathcal{H}^{d-1}(d(x, u))$$

Další zobecnění

Co chceme:

Další zobecnění

Co chceme:

- aditivita $(C_k(X \cup Y) + C_k(X \cap Y) = C_k(X) + C_k(Y))$

Další zobecnění

Co chceme:

- aditivita $(C_k(X \cup Y) + C_k(X \cap Y) = C_k(X) + C_k(Y))$
- Gauss-Bonnetův vzorec $(C_0(X) = \chi(X))$, X kompaktní; "lokální" forma

Další zobecnění

Co chceme:

- aditivita $(C_k(X \cup Y) + C_k(X \cap Y) = C_k(X) + C_k(Y))$
- Gauss-Bonnetův vzorec $(C_0(X) = \chi(X))$, X kompaktní; "lokální" forma
- kinematické vzorce

Další zobecnění

Co chceme:

- aditivita $(C_k(X \cup Y) + C_k(X \cap Y) = C_k(X) + C_k(Y))$
- Gauss-Bonnetův vzorec $(C_0(X) = \chi(X))$, X kompaktní; "lokální" forma
- kinematické vzorce

- Lokálně konečná sjednocení množin kladného dosahu (Zähle, R., 1986, 2002)

Další zobecnění

Co chceme:

- aditivita ($C_k(X \cup Y) + C_k(X \cap Y) = C_k(X) + C_k(Y)$)
- Gauss-Bonnetův vzorec ($C_0(X) = \chi(X)$), X kompaktní; "lokální" forma
- kinematické vzorce

- Lokálně konečná sjednocení množin kladného dosahu (Zähle, R., 1986, 2002)
- Subanalytické množiny (Fu, 1994)

Další zobecnění

Co chceme:

- aditivita $(C_k(X \cup Y) + C_k(X \cap Y) = C_k(X) + C_k(Y))$
- Gauss-Bonnetův vzorec $(C_0(X) = \chi(X))$, X kompaktní; "lokální" forma
- kinematické vzorce

- Lokálně konečná sjednocení množin kladného dosahu (Zähle, R., 1986, 2002)
- Subanalytické množiny (Fu, 1994)
- o-minimální systémy (Bröcker, Bernig, 2000)

Další zobecnění

Co chceme:

- aditivita ($C_k(X \cup Y) + C_k(X \cap Y) = C_k(X) + C_k(Y)$)
- Gauss-Bonnetův vzorec ($C_0(X) = \chi(X)$), X kompaktní; "lokální" forma
- kinematické vzorce

- Lokálně konečná sjednocení množin kladného dosahu (Zähle, R., 1986, 2002)
- Subanalytické množiny (Fu, 1994)
- o-minimální systémy (Bröcker, Bernig, 2000)
- speciální množiny s lip. hranicí (Zähle, R. 2003)

Další zobecnění

Co chceme:

- aditivita ($C_k(X \cup Y) + C_k(X \cap Y) = C_k(X) + C_k(Y)$)
- Gauss-Bonnetův vzorec ($C_0(X) = \chi(X)$), X kompaktní; "lokální" forma
- kinematické vzorce

- Lokálně konečná sjednocení množin kladného dosahu (Zähle, R., 1986, 2002)
- Subanalytické množiny (Fu, 1994)
- o-minimální systémy (Bröcker, Bernig, 2000)
- speciální množiny s lip. hranicí (Zähle, R. 2003)
- množiny s DC hranicí, WDC množiny (Pokorný, R., 2014)

Základní kinematický vzorec

$$\int_{\mathcal{G}_d} C_k(X \cap gY)\, dg = \sum_{p+q=d+k} \gamma_{d,p,q} C_p(X) C_q(Y)$$

Základní kinematický vzorec

$$\int_{\mathcal{G}_d} C_k(X \cap gY)\, dg = \sum_{p+q=d+k} \gamma_{d,p,q} C_p(X) C_q(Y)$$

Croftonův vzorec:

$$\int_{A(d,j)} C_k(X \cap E)\, dE = \gamma_{d,j,k} C_{d+k-j}(X)$$

Základní kinematický vzorec

$$\int_{\mathcal{G}_d} C_k(X \cap gY)\, dg = \sum_{p+q=d+k} \gamma_{d,p,q} C_p(X) C_q(Y)$$

Croftonův vzorec:

$$\int_{A(d,j)} C_k(X \cap E)\, dE = \gamma_{d,j,k} C_{d+k-j}(X)$$

(lokální verze)

Základní kinematický vzorec

$$\int_{\mathcal{G}_d} C_k(X \cap gY)\, dg = \sum_{p+q=d+k} \gamma_{d,p,q} C_p(X) C_q(Y)$$

Croftonův vzorec:

$$\int_{A(d,j)} C_k(X \cap E)\, dE = \gamma_{d,j,k} C_{d+k-j}(X)$$

(lokální verze)

- Blaschke, Chern, Santaló (hladká konvexní tělesa)

Základní kinematický vzorec

$$\int_{\mathcal{G}_d} C_k(X \cap gY)\, dg = \sum_{p+q=d+k} \gamma_{d,p,q} C_p(X) C_q(Y)$$

Croftonův vzorec:

$$\int_{A(d,j)} C_k(X \cap E)\, dE = \gamma_{d,j,k} C_{d+k-j}(X)$$

(lokální verze)

- Blaschke, Chern, Santaló (hladká konvexní tělesa)
- Federer (1959, PR množiny)

Základní kinematický vzorec

$$\int_{\mathcal{G}_d} C_k(X \cap gY)\, dg = \sum_{p+q=d+k} \gamma_{d,p,q} C_p(X) C_q(Y)$$

Croftonův vzorec:

$$\int_{A(d,j)} C_k(X \cap E)\, dE = \gamma_{d,j,k} C_{d+k-j}(X)$$

(lokální verze)

- Blaschke, Chern, Santaló (hladká konvexní tělesa)
- Federer (1959, PR množiny)
- "general" form (Fu, 2000)

Základní kinematický vzorec

$$\int_{\mathcal{G}_d} C_k(X \cap gY)\, dg = \sum_{p+q=d+k} \gamma_{d,p,q} C_p(X) C_q(Y)$$

Croftonův vzorec:

$$\int_{A(d,j)} C_k(X \cap E)\, dE = \gamma_{d,j,k} C_{d+k-j}(X)$$

(lokální verze)

- Blaschke, Chern, Santaló (hladká konvexní tělesa)
- Federer (1959, PR množiny)
- "general" form (Fu, 2000)
- WDC množiny (Fu, Pokorný, R., 2017)

Translativní kinematické vzorce

$$\int_{\mathbb{R}^d} C_k(X \cap (Y + z))\, dz = \sum_{p+q=d+k} C_{p,q}(X, Y)$$

Translativní kinematické vzorce

$$\int_{\mathbb{R}^d} C_k(X \cap (Y + z))\, dz = \sum_{p+q=d+k} C_{p,q}(X, Y)$$

- Schneider, Weil (1986, konvexní tělesa)

Translativní kinematické vzorce

$$\int_{\mathbb{R}^d} C_k(X \cap (Y + z))\, dz = \sum_{p+q=d+k} C_{p,q}(X, Y)$$

- Schneider, Weil (1986, konvexní tělesa)
- R., Zähle (1995, PR množiny)

Translativní kinematické vzorce

$$\int_{\mathbb{R}^d} C_k(X \cap (Y+z))\, dz = \sum_{p+q=d+k} C_{p,q}(X,Y)$$

- Schneider, Weil (1986, konvexní tělesa)
- R., Zähle (1995, PR množiny)
- iterované vzorce (Weil, R.)

Translativní kinematické vzorce

$$\int_{\mathbb{R}^d} C_k(X \cap (Y + z))\, dz = \sum_{p+q=d+k} C_{p,q}(X, Y)$$

- Schneider, Weil (1986, konvexní tělesa)
- R., Zähle (1995, PR množiny)
- iterované vzorce (Weil, R.)
- translativní Croftonův vzorec (R., 1997)

Rotační kinematické vzorce

$$\int_{G(d,j)} C_k(X \cap L)\, dL = \int_{\mathrm{nor}\, X} Q_{d,k,j}(X; x, u)\, \mathcal{H}^{d-1}(d(x,u))$$

- Jensen, R., 2008
- Auneau, Jensen, R., 2012
- $\int_{SO_d} C_k(X \cap \rho Y)\, d\rho$ - Auneau

Vlajkové míry

$$F(d,k) := \{(u,U) : u \in S^{d-1},\ u \perp U \in G(d,d-1-k)\}$$

Vlajkové míry

$$F(d,k) := \{(u,U) : u \in S^{d-1},\ u \perp U \in G(d,d-1-k)\}$$

$\Omega_k(X,\cdot)$ - míra na $F(d,k)$ (marginální míra na S^{d-1} je "area measure" $S_k(X,\cdot)$)

Vlajkové míry

$$F(d,k) := \{(u,U) : u \in S^{d-1},\ u \perp U \in G(d,d-1-k)\}$$

$\Omega_k(X,\cdot)$ - míra na $F(d,k)$ (marginální míra na S^{d-1} je “area measure” $S_k(X,\cdot)$)

$$C_{p,q}(X,Y) = \int_{F(d,p)\times F(d,q)} \phi \, d(\Omega_p(X,\cdot)\otimes\Omega_q(Y,\cdot))$$

Vlajkové míry

$$F(d,k) := \{(u,U) : u \in S^{d-1},\, u \perp U \in G(d,d-1-k)\}$$

$\Omega_k(X,\cdot)$ - míra na $F(d,k)$ (marginální míra na S^{d-1} je “area measure” $S_k(X,\cdot)$)

$$C_{p,q}(X,Y) = \int_{F(d,p)\times F(d,q)} \phi \, d(\Omega_p(X,\cdot) \otimes \Omega_q(Y,\cdot))$$

$$V(K_1,p_1;\ldots,K_k,p_k) = \int \Phi \, d(\Omega_{p_1}(K_1,\cdot) \otimes \Omega_{p_k}(K_k,\cdot))$$

(Hug, Weil, R., 2013, 2017)

Náhodné měřitelné množiny (RAMS)

$$\Xi : (\Omega, \Sigma, \mathsf{Pr}) \to \mathcal{M}$$

Náhodné měřitelné množiny (RAMS)

$$\Xi : (\Omega, \Sigma, \Pr) \to \mathcal{M}$$

- $\mathcal{M}$ - prostor leb. měř. podmnožin $\mathbb{R}^d$

Náhodné měřitelné množiny (RAMS)

$$\Xi : (\Omega, \Sigma, \Pr) \to \mathcal{M}$$

- $\mathcal{M}$ - prostor leb. měř. podmnožin $\mathbb{R}^d$
- topologie daná vnořením do L_1^{loc}

Náhodné měřitelné množiny (RAMS)

$$\Xi : (\Omega, \Sigma, \Pr) \to \mathcal{M}$$

- $\mathcal{M}$ - prostor leb. měř. podmnožin $\mathbb{R}^d$
- topologie daná vnořením do L_1^{loc}
- zobrazení $A \mapsto \mathrm{per}(A, U)$ měřitelné na $\mathcal{M}$ pro každou otevřenou množinu U

Náhodné měřitelné množiny (RAMS)

$$\Xi : (\Omega, \Sigma, \mathrm{Pr}) \to \mathcal{M}$$

- $\mathcal{M}$ - prostor leb. měř. podmnožin $\mathbb{R}^d$
- topologie daná vnořením do L_1^{loc}
- zobrazení $A \mapsto \mathrm{per}(A, U)$ měřitelné na $\mathcal{M}$ pro každou otevřenou množinu U
- pro Ξ *stacionární* lze definovat specifický perimetr $\overline{\mathrm{per}}(\Xi)$

Náhodné měřitelné množiny (RAMS)

$$\Xi : (\Omega, \Sigma, \Pr) \to \mathcal{M}$$

- $\mathcal{M}$ - prostor leb. měř. podmnožin $\mathbb{R}^d$
- topologie daná vnořením do L_1^{loc}
- zobrazení $A \mapsto \operatorname{per}(A, U)$ měřitelné na $\mathcal{M}$ pro každou otevřenou množinu U
- pro Ξ *stacionární* lze definovat specifický perimetr $\overline{\operatorname{per}}(\Xi)$
- v případě konečného specifického perimetru lze definovat směrové rozdělení na hranici $\mathcal{R}^*(A, \cdot)$

Náhodné množiny s konečným perimetrem

$\mathrm{per}(A) < \infty$, $Q \subset \mathbb{R}^d$ konečná:

Náhodné množiny s konečným perimetrem

$\mathrm{per}(A) < \infty$, $Q \subset \mathbb{R}^d$ konečná:

$$\lim_{r\to 0+} \frac{\mathrm{vol}(A \oplus rQ) - \mathrm{vol}(A)}{r} = \int h(Q, v)\, S^*_{d-1}(A, dv)$$

Náhodné množiny s konečným perimetrem

$\mathrm{per}(A) < \infty$, $Q \subset \mathbb{R}^d$ konečná:

$$\lim_{r\to 0+} \frac{\mathrm{vol}(A \oplus rQ) - \mathrm{vol}(A)}{r} = \int h(Q, v)\, S^*_{d-1}(A, dv)$$

Ξ náhodná množina s konečným perimetrem, $H_Q(r)$ - kontaktní distribuční funkce

Náhodné množiny s konečným perimetrem

$\mathrm{per}(A) < \infty$, $Q \subset \mathbb{R}^d$ konečná:

$$\lim_{r\to 0+} \frac{\mathrm{vol}(A \oplus rQ) - \mathrm{vol}(A)}{r} = \int h(Q,v)\, S^*_{d-1}(A,dv)$$

Ξ náhodná množina s konečným perimetrem, $H_Q(r)$ - kontaktní distribuční funkce

$$(1-\bar{p})H'_Q(0+) = \overline{\mathrm{per}}(\Xi) \int h(-Q,v)\, \mathcal{R}^*(A,dv)$$

(Kiderlen, R. 2017)